513.23
P64u
cop.2

Piltz, Adolf

Über die Häufigkert der Primzahlen im arithmetischen Progressionem und über verwandte gesetze.

MATHEMATICS
LIBRARY

ÜBER DIE
HÄUFIGKEIT DER PRIMZAHLEN
IN
ARITHMETISCHEN PROGRESSIONEN
UND ÜBER
VERWANDTE GESETZE.

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER VENIA DOCENDI

BEI DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER UNIVERSITÄT JENA

VON

Dr. ADOLF PILTZ.

JENA 1884.

DRUCK VON A. NEUENHAHN.

513.23
~~511.3~~
P64u
cop 2
Math
28 ap 31 mo

Die merkwürdige Abhandlung Riemann's „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" in den Monatsberichten der Berliner Akademie von 1859 führt in die analytische Zahlentheorie eine Methode ein, die sehr verallgemeinert werden kann und in hohem Grade umgestaltend auf die bisherigen Resultate dieser Disciplin wirkt. Indess ist der Gedankengang der Abhandlung wenig durchsichtig, einige wesentliche Entwicklungen sind in derselben übergangen, auch kommen mehrere störende Inkorrektheiten vor. Es ist die Absicht, in vorliegender Schrift die Riemann'sche Methode von einem andern Gesichtspunkt und in verallgemeinerter Form zu entwickeln und durch einige der einfachsten Beispiele zu erläutern.

Es möge zunächst einiges über die sonstige Literatur, soweit sie die zu behandelnden Probleme betrifft, vorausgeschickt werden.

Das Problem, in der beim ersten Anblick ziemlich regellosen Vertheilung der Primzahlen in der Zahlenreihe gleichwohl ein Gesetz nachzuweisen, ist schon alt. Vor allem liegt daran, die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gewissen Grenze, wenn auch nur näherungsweise durch eine allgemeine Formel zu bestimmen. Gauss[1]) und Legendre[2]) kamen in Folge ausgedehnter Abzählungen zu dem gemeinsamen Resultat, dass die Anzahl der Primzahlen unterhalb x annähernd mit dem Integrallogarithmus von x übereinstimmt. Doch gelang es auch Gauss nicht, diesen Nährungswerth durch theoretische Gründe abzuleiten und den Fehler in Grenzen einzuschliessen.

1) Werke, Bd. 2.
2) Théorie des nombres.

761476

Legendre beschäftigte sich auch mit der Untersuchung darüber, wie sich die Primzahlen in die verschiedenen arithmetischen Progressionen vertheilen. Er suchte den zu andern Zwecken wichtigen Satz zu beweisen, dass in jeder solchen Progression, deren Anfangsglied und Differenz theilerfremd sind, unendlich viel Primzahlen vorkommen. Dabei ging er aber von einem andern ohne Beweis hingestellten Satz aus, der sich bei näherer Untersuchung leicht als unrichtig herausstellt. Da gleichwohl eine Widerlegung dieses Satzes, den auch Dirichlet für richtig gehalten und zu beweisen versucht hat, meines Wissens noch nicht veröffentlicht ist, so soll wegen seines historischen Interesses am Ende dieser Arbeit darauf eingegangen werden.

Den angeführten Satz von der arithmetischen Progression bewies zuerst Dirichlet[1]). Auch mit der Ableitung des Gauss-Legendre'schen Näherungswerths für die Anzahl der Primzahlen unterhalb eines variabeln x beschäftigte er sich, wie aus einer Stelle seiner Schriften hervorgeht. Da er diese Untersuchung nicht veröffentlicht hat, so scheint es, als habe er ebenfalls nicht vermocht, für den Fehler eine hinreichend kleine Grössenordnung nachzuweisen. Zwar hat Herr Mertens[2]) gezeigt, wie sich mit den Dirichlet'schen Mitteln nicht nur für die Summe der reciproken Werthe der Primzahlen unterhalb x überhaupt, sondern auch für dieselbe Summe mit Beschränkung auf die Primzahlen einer bestimmten arithmetischen Progression ein Näherungsausdruck ableiten lässt. Doch lässt sich von dieser Summe der -1ten Potenzen der Primzahlen auf die Summe der 0ten Potenzen, d. h. auf ihre Anzahl nur unter einer noch unbewiesenen Voraussetzung ein Schluss machen. Diese Voraussetzung ist die Annahme, dass diese Anzahl mit gewisser Genauigkeit als einfache Funktion von x angegeben werden kann. Nur unter dieser Voraus-

---

1) Abhandlungen der Berliner Akademie von 1837, oder Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgeg. von Dedekind.

2) Crelle's Journal, Bd. 78.

setzung beweist auch Herr Tschebischeff[1]) die Richtigkeit des Gauss-Legendre'schen Näherungsausdrucks Li(x).

Dagegen hatten andre Untersuchungen von Gauss[2]) und Dirichlet[3]) über ähnliche solche Anzahlen, bezüglich Summen einigen Erfolg aufzuweisen. Gauss theilt nur einige Resultate ohne die Ableitung mit. Eines derselben ist bis jetzt noch nicht bewiesen worden[4]). Dirichlet stellt seine Abhandlung nur als Vorläuferin einer andern hin, die weitergehende Methoden enthalten solle. Es handelt sich bei Dirichlet darum, die Summen, die das Objekt der Untersuchung sind, jedesmal bis auf einen Fehler, für den eine obere Grenze nachzuweisen ist, in solche Ausdrücke umzuformen, die mit Hilfe halbconvergenter Reihen auszuwerthen sind. Herr Mertens[5]) hat sich im Wesentlichen der Methode Dirichlet's angeschlossen. Das Problematische jedoch, was bei dieser Methode übrig bleibt, sind die erwähnten Fehlergrenzen. So hat Herr Mertens für einige Fälle kleinere Fehlergrenzen als Dirichlet angegeben. Ob und wieweit man aber in der Reducirung dieser Fehlermaxima fortzugehen hat, ist für alle von Dirichlet und Mertens behandelten Gesetze noch fraglich.

Nun findet diese Frage durch die genannte Riemann'sche Schrift „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" für dies specielle Problem eine theilweise Erledigung. Wird die gegebene Grösse, bis zu der die Anzahl der Primzahlen gesucht wird, mit x bezeichnet, so entwickelt Riemann diese Anzahl in eine unendliche Reihe von Funktionen von x. Die bedeutsamsten Glieder der Reihe sind $\mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$. Man kann denselben als „mittlere Anzahl" bezeichnen, insofern

---

1) Liouville's Journal, 1. Serie, Bd. XVII.

2) Disquis. Arithm. Art. 301 ff.

3) Abhandlungen der Berliner Akademie von 1849.

4) Gemeint ist die Formel für die mittlere Klassenanzahl der primitiven binären quadratischen Formen mit negativer Determinante. Herr Mertens in der nachher anzuführenden Abhandlung hat sie wenigstens nicht in der ganzen Ausdehnung gefunden.

5) Crelle's Journal, Bd. 77.

die übrigen Glieder theils gegen dieselben unbedeutend sind, theils mit wachsenden x periodisch ihr Vorzeichen ändern. Diese übrigen Glieder, d. h. die Abweichung der „mittlern" von der wirklichen Anzahl, haben aber zusammengefasst einen absoluten Werth, der für wachsende x kleiner wird als jede höhere als die $\frac{1}{2}^{te}$ Potenz von x, dagegen im allgemeinen grösser ist als jede geringere Potenz. Die dem absoluten Betrag des Fehlermaximums nächste Potenz von x ist also genau die $\frac{1}{2}^{te}$.

Doch darf nicht verschwiegen werden, dass dies merkwürdige Resultat, das alle verwandten Resultate an Präcision übertrifft, von Riemann noch nicht völlig sicher gestellt ist. Es steht und fällt mit einem Satz, den Riemann zunächst nur als wahrscheinlich hingestellt aber noch nicht zu beweisen vermocht hat. Es enthält nämlich jede jener periodisch ihr Vorzeichen ändernden Funktionen von x in der von Riemann aufgestellten Reihe als Parameter eine der complexen Nullstellen einer Funktion $\xi(s)$. Der Satz, um den es sich handelt, sagt aus, dass alle diese complexen Nullstellen denselben reellen Theil $\frac{1}{2}$ besitzen.

Es ist mir nicht bekannt, dass der angeführte Satz schon einen Beweis gefunden hätte, oder die Riemann'sche neue Methode schon auf andre Probleme angewandt wäre.

Wie sich im Folgenden zeigen wird, lassen sich dem Riemann'schen ähnliche Resultate für eine Reihe andrer zum Theil schon von Dirichlet behandelter Probleme mit Zuhilfenahme derselben Funktion $\xi(s)$ ableiten, und hängt das dem Riemann'schen analoge Resultat für die Primzahlen einer gegebenen arithmetischen Reihe ausser von $\xi(s)$ noch von einer Klasse verwandter Funktionen ab, die mit $\xi(s)$ jene angeführte merkwürdige Eigenschaft theilen. Doch wird sich die Darstellung der Einfachheit wegen auf solche arithmetischen Progressionen beschränken, deren Differenz eine ungerade Primzahl ist, da der Übergang auf den allgemeinern Fall keine Schwierigkeit bietet.

Für den Beweis jenes Satzes über die complexen Nullstellen der Funktion $\xi(s)$ und der erwähnten verwandten Funk-

tionen sollen nachher einige vorläufige Andeutungen gegeben werden.

Bemerkenswerth dürfte vielleicht der nachher bei der Untersuchung dieser Funktionen sich gelegentlich mitergebende Beweis des berühmten Satzes sein, dem Gauss die Abhandlung Summatio quarundam serierum singularium gewidmet hat.

§ 1. **Darstellung einer Reihe durch ein Aggregat bestimmter Integrale.**

Den Problemen, um die es sich handeln wird, kann man folgende analytische Einkleidung geben.

Es liegt eine Reihe vor von der Form

$$c_1\, 1^{-s} + c_2 \cdot 2^{-s} + c_3\, 3^{-s} + ..,$$

wo c_1, c_2, .. Constanten bedeuten, s eine analytische Variable ist. Die Reihe convergirt ins Unendliche fortgesetzt, für solche Werthe von s, deren reeller Theil grösser ist als eine gewisse Grösse a, die je nach der besondern Definition der c verschieden sein kann. Für dies Werthgebiet von s ist dann die Reihe eine eindeutige analytische Funktion dieser Variabeln, die wir mit F(s) bezeichnen wollen.

Es lässt sich dann in jedem einzelnen Fall F(s) in ein Aggregat $F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + ..$ zerlegen (zu dem auch noch ein constantes Glied treten kann), dessen einzelne Glieder $F_m(s)$ die Eigenschaft haben, sich in die Form eines bestimmten Integrals $\int_1^\infty f_m(x)\, x^{-s}\, dx$ bringen zu lassen.

Handelt es sich dann darum, einen Ausdruck zu finden für

$$\sum_{n=1}^{n \leqq x} c_n\, n^{-s},$$

so findet man einen solchen, indem das Aggregat bildet

$$\sum \int_1^x f_m(x)\, x^{-s}\, dx,$$

zu welchem noch das eventuelle constante Glied hinzuzufügen ist. Das heisst, man integrirt die Integrale, durch welche die Funktionen $F_m(s)$ dargestellt sind, nicht bis zur obern Grenze ∞, sondern bis zur Grenze x. Die Variable s kann dann jeden beliebigen Werth annehmen.

Dazu sind noch folgende Bemerkungen zu machen.

Fällt die obere Grenze x mit einer ganzen Zahl n zusammen, so wird durch das Aggregat von Integralen die Summe

$$c_1\, 1^{-s} + c_2\, 2^{-s} + .. + c_{n-1}\, n^{-s} + \tfrac{1}{2} c_n\, n^{-s}$$

dargestellt.

Ferner sind die bestimmten Integrale im allgemeinen in einer bestimmten Reihenfolge zu nehmen. Mit Ausnahme einer oder mehrerer der Funktionen $f_m(x)$ wechseln diese nämlich in mehr oder weniger raschen Perioden das Vorzeichen. Die Integrale müssen nach abnehmender Grösse dieser Perioden angeordnet werden. Lässt man alle Integrale fort, für welche $f_m(x)$ periodisch ist, so bleibt ein Ausdruck übrig, den man nach Gauss als den Mittelwerth bezeichnen kann.

Die Auffindung der Zerlegung von F(s) in das Aggregat $\Sigma' F_m(s)$, sowie die Verwandlung der $F_m(s)$ in Integrale bietet in den einzelnen Fällen wenig Schwierigkeiten. Zum Beweis der Convergenz des Aggregats von Integralen und des Grades der Convergenz hat man etwas weiter auszuholen [1]).

Es erscheint zweckmässig, zuerst ein leichtes Beispiel für diese Methode zu erörtern, das zwar sonst kein zahlentheoretisches Interesse bietet, die einzelnen Momente, auf die es ankommt, aber sehr übersichtlich zu Tage treten lässt und dadurch für die Untersuchung schwierigerer Fälle Fingerzeige gibt.

---

1) In einer Anmerkung am Ende meiner Doktordissertation: „Über das Gesetz, nach welchem die mittlere Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Produkte einer gegebenen Anzahl Faktoren mit der Grösse der Zahlen wächst", Berlin 1881, habe ich die hier dargelegte Methode, Mittelwerthe zahlentheoretischer Funktionen zu finden, im Wesentlichen schon erwähnt, jedoch ohne Berücksichtigung jener periodischen Integrale, da es mir noch nicht bekannt war, dass alle bisher behandelten Probleme, auch das dortige, mit solcher Vollständigkeit gelöst werden können.

§ 2. **Beispiel.**

Es gelte die Definition.

$$F(s)=lq\cdot q^{-s}+lq\cdot q^{-2s}+..+lq\cdot q^{-ms}+..,$$

so dass bei der Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphen

$c_n=lq$, wenn n eine positive Potenz von q

$=0$ in den übrigen Fällen.

Es lässt sich dann F(s) zusammenziehen in

$$lq\cdot q^{-s}:1-q^{-s}=\frac{d}{ds}l\left(1-q^{-s}\right).$$

Nun ist bekanntlich

$$1-q^{-s}=lq\cdot q^{-\frac{s}{2}}\cdot s\cdot\prod_{1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{lq\cdot s}{2n\pi}\right)^2\right\}.$$

Daher ist

$$\frac{d}{ds}l\left(1-q^{-s}\right)=-\frac{1}{2}lq+\frac{1}{s}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{s+\frac{2n\pi i}{lq}}+\frac{1}{s-\frac{2n\pi i}{lq}}\right\}.$$

Wir sehen, dass die Funktionen $F_m(s)$ des vorigen Paragraphen in unserm Fall sämmtlich die Form $\frac{1}{s-c}$ haben. Sie lassen sich für solche s, deren reeller Theil grösser ist als 1, in die Form

$$\int_{1}^{\infty}x^{c-1-s}\,dx$$

bringen. Führt man diese Verwandlung aus, so geht die rechte Seite der letzten Gleichung über in

$$-\frac{1}{2}lq+(\lim m=\infty)\sum_{-m}^{+m}\int_{1}^{\infty}x^{\frac{2n\pi i}{lq}-1}\cdot x^{-s}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\mathrm{lq} + (\lim m = \infty)\int_1^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\pi\,\frac{\mathrm{lx}}{\mathrm{lq}}}{\sin\pi\,\frac{\mathrm{lx}}{\mathrm{lq}}}\,x^{-s-1}\,dx.$$

Wir untersuchen, welchen Werth dieser Ausdruck annimmt, wenn wir das darin enthaltene Integral statt von 1 bis ∞ von 1 bis x nehmen. Da die Funktion unter dem Integralzeichen bei wachsendem m nur für solche x ins Unendliche wächst, die gleich ganzen Potenzen von q sind, und zwar, wenn wir abkürzend $(2m+1)\pi : \mathrm{lq}$ mit m′ bezeichnen, für $x = q^n$ wie

$$\frac{\mathrm{lq}\cdot q^{-ns}\cdot \sin m'\mathrm{lx}}{\pi x\,(\mathrm{lx} - n\mathrm{lq})},$$

so schreiben wir den Ausdruck in der Form

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{lq} + \sum_n \frac{\mathrm{lq}\cdot q^{-ns}}{\pi}\int_1^{x} \frac{\sin m'\mathrm{lx}}{\mathrm{lx} - n\mathrm{lq}}\,d\mathrm{lx}$$

$$+\int_1^{x} \sin m'\mathrm{lx}\left(\frac{x^{-s}}{\sin\pi\,\frac{\mathrm{lx}}{\mathrm{lq}}} - \sum_n \frac{\mathrm{lq}\cdot q^{-ns}}{\pi\,(\mathrm{lx} - n\mathrm{lq})}\right) d\,\mathrm{lx},$$

wobei über alle Werthe von n zu summiren ist, für welche q^n zwischen 1 und x inclusive liegt, und die Zahl m in

$$m' = (2m+1)\pi : \mathrm{lq}$$

als unendlich gross zu denken ist. Benutzen wir in einem der Integrale

$$\int_1^{x} \frac{\sin m'\mathrm{lx}}{\mathrm{lx} - n\,\mathrm{lq}}\,d\,\mathrm{lx}$$

die Substitution $\mathrm{lx} - n\,\mathrm{lq} = y$, so geht es über in

$$\int_{-n\,lq}^{lx-n\,lq} \frac{\sin m'y}{y}\,dy.$$

Sofern weder die obere noch die untere Grenze dieses Integrals verschwindet, unterscheidet es sich von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = \pi$$

nur um den Rest

$$\int_{-\infty}^{-n\,lq} + \int_{lx-n\,lq}^{\infty} \frac{\sin m'y}{y}\,dy,$$

der durch partielle Integration übergeht in

$$\frac{1}{m'}\left(\frac{\cos m'(lx-n\,lq)}{lx-n\,lq} + \frac{\cos m'n\,lq}{n\,lq}\right)$$
$$-\frac{1}{m'}\left(\int_{-\infty}^{-n\,lq} + \int_{lx-n\,lq}^{\infty} \frac{\cos m'y}{y^2}\,dy\right),$$

also wie $\frac{1}{m'}$ gegen 0 convergirt.

In gleicher Weise findet man den Werth des Integrals für den Fall, dass $n=0$ oder $lx=n\,lq$, bis auf eine Grösse der Ordnung von $\frac{1}{m'}$, bezüglich

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\,dy \text{ oder } =\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin y}{y}\,dx,$$

die je $=\frac{\pi}{2}$ sind. Und durch gleiche partielle Integratation findet man auch den Werth des letzten Integrals im besprochenen Ausdruck als von der Grössenordnung wie $\frac{1}{m'}$. Alles

zusammengefasst erhalten wir das Resultat, dass unser Ausdruck bis auf eine Grösse der Ordnung von $\frac{1}{m'}$, den Werth

$$lq \cdot q^{-s} + .. + lq \cdot q^{-ns}$$

hat, wenn q^n die höchste Potenz von q unterhalb x ist, wobei aber für den speciellen Fall $x = q^n$ die Modification eintritt, dass das letzte Glied der Summe mit den Faktor $\frac{1}{2}$ zu versehen ist. Dies stimmt mit der Behauptung des vorigen Paragraphen zusammen.

Ferner sehen wir auch, dass wir bei der Aufstellung des Aggregats bestimmter Integrale, das sich gerade hier leicht in ein einziges Integral zusammenziehen liess, die Glieder desselben in der bestimmten im vorigen Paragraphen angegebenen Reihenfolge angeordnet haben. Die zu integrirende Funktion des Summenintegrals fanden wir als eine Funktion, die in um so kürzern Perioden das Vorzeichen wechselt, je mehr Glieder des Aggregats wir hinzunahmen. Der Umstand, dass das Summenintegral beim Übergang zur Grenze nur an den besondern Stellen $x = q^n$ sprungweise zunimmt, und zwischen zwei aufeinanderfolgenden solchen Grössen constant bleibt, wird also nicht dadurch erreicht, dass die zu integrirende Funktion zwischen diesen Grössen $= 0$ ist, sondern dass ihr durchschnittlicher absoluter Werth in jeder Gegend von x eine bestimmte von 0 verschiedene Grösse behält, aber so, dass die aufeinanderfolgenden Strecken eines positiven Werths und eines negativen Werths, je mehr Glieder des Aggregats man hinzunimmt, sich um so genauer gegenseitig annulliren. Je näher man einem Punkte $x = q^n$ kommt, um so schwächer ist die Convergenz des Summenintegrals gegen den Endwerth, sodass, wenn man nur eine hinreichende grosse Gliederzahl $2m + 1$ des Aggregats von Integralen addirt, man immer Werthe von x finden kann, für welche der Faktor, mit welchem man $\frac{1}{m}$ versehen muss, um die Abweichung auszudrücken, jede gegebene Grösse übersteigt, wenn auch für jedes bestimmte x ein bestimmter Faktor nie überstiegen werden kann.

Jedem darzustellenden Glied $lq \cdot q^{-ns}$ der Summe entspricht ein Bestandtheil

$$\int \frac{\sin m'(lx - n lq) \cdot lq \cdot q^{-ns} \cdot d lx}{(lx - n lq)\pi}$$

des Summenintegrals.

Die zu integrirende Funktion ist daher für die singulären Stellen umgekehrt proportional zur Länge der Periode, in der sie in dieser Gegend das Vorzeichen wechselt.

Alles dies, insbesondere auch der letzte Umstand, gilt auch für die spätern Probleme.

§ 3. **Übergang zu den andern Problemen. Einführung der Funktionen $\xi(s)$ und $\xi(s, \nu)$.**

Den Ansatzpunkt für die andern Probleme, zu denen wir uns jetzt wenden, insbesondere für die Aufsuchung des Gesetzes der Vertheilung der Primzahlen, bietet die Euler'sche Gleichung [1])

$$\Sigma n^{-s} = \prod \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

in welcher für n alle ganzen Zahlen, für p alle Primzahlen zu setzen sind. Beide Seiten convergiren, sobald der reelle Theil von s grösser als 1 ist. Die Funktion von s, die auf diese Weise zunächst für diesen Werthbereich durch die linke oder rechte Seite der Gleichung definirt ist, wird nach Riemann mit $\xi(s)$ bezeichnet. (Mehr oder weniger deutlich gehen bei der Behandlung dieses Problems übrigens ausser der Riemann'schen auch alle andern früher genannten Schriften von dieser Relation aus).

Durch Logarithmirung dieser Gleichung findet man nämlich

$$l\,\xi(s) = \sum \frac{1}{m} p^{-s},$$

wenn rechter Hand für p alle Primzahlen, für m alle ganzen Zahlen gesetzt werden.

---

1) Introductio in analysin infinitorum T. I. Cap. XV.

Nach dem Prinzip des § 1 wird es darauf ankommen $l\zeta(s)$ in ein Aggregat von Funktionen aufzulösen, die sich sämmtlich in die Form $\int_1^\infty f_m(x)\,x^{-s}dx$ bringen lassen. Dann wird

$\sum \int_1^x f_m(x)\,x^{-s}dx$ ein Ausdruck für $\sum \frac{1}{m}\,p^{-ms}$, $(p^m < x)$, sein,

insofern die dortigen Coefficienten c_n in diesem Beispiel definirt sind durch

$$c_n = \frac{1}{m}, \text{ wenn } n = p^m.$$
$$= 0 \text{ in den andern Fällen.}$$

Diese Zerlegung von $l\zeta(s)$ ist wie sich zeigen wird möglich. Im Resultat kann dann s jeden Werth, insbesondere auch den Werth 0 annehmen. Man wird auf diese Weise mithin einen Ausdruck für die Anzahl der Primzahlen + der halben Anzahl der Primzahlquadrate + $\frac{1}{3}$ der Kuben u. s. f. unterhalb x bekommen. Die höhern Potenzen von Primzahlen ausser der ersten werden leicht eliminirt werden können.

Ausserdem lassen sich noch unendlich viele andre Reihen der Form $\sum c_n n^{-s}$ mit Hilfe der obigen Euler'schen Relation ableiten. Setzen wir z. B.

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum c_n n^{-s},$$

so wird hierdurch c_n definirt:

$$c_n = 2^{\delta},$$

wenn δ die Anzahl der in n aufgehenden Primzahlen bedeutet. c_n würde also durchschnittlich der Anzahl der Genera der quadratischen binären primitiven Formen der Determinante $-n$ gleich kommen.

Setzt man

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum c_n n^{-s},$$

so folgt aus der Euler'schen Relation für c_n die Bestimmung

$$c_n = \varphi(n),$$

d. h. gleich der Anzahl der zu n theilerfremden Zahlen unterhalb n.

Ein Ausdruck für $\sum c_n n^{-s}$, $(n < x)$ ergibt sich für jede dieser beiden letztern Definitionen von c_n auf dieselbe Weise und gleichzeitig mit der Lösung des der ersteren Definition $\left(\sum c_n n^{-s} = 1\,\xi(s)\right)$ entsprechenden Problems.

(Eine Aufzählung solcher von der Funktion $\xi(s)$ abhängigen zahlentheoretischen Funktionen c_n gibt Herr Cantor, Göttinger gelehrte Nachrichten 1880 S. 161, aber ohne die Lösung der sich daran schliessenden Probleme).

Um nach gleicher Methode das Gesetz der Vertheilung der Primzahlen in arithmetischen Progressionen zu finden, sind ausser $\xi(s)$ noch andre verwandte Funktionen zu benutzen. Wie bemerkt, soll nur der Fall, dass die Differenz der Progression eine ungerade Primzahl ist, berücksichtigt werden. Sei diese Primzahl $= q$, ferner m eine primitive Wurzel der Congruenz

$$x^{q-1} \equiv 1 \pmod q,$$

so hat bekanntlich unter den Zahlen $0, 1, .., q-2$ immer eine und nur eine, mit ind n zu bezeichnende, Zahl die Eigenschaft, dass wenn n eine nicht durch q theilbare Zahl bedeutet, die Congruenz gilt

$$m^{\operatorname{ind} n} \equiv n \pmod q.$$

Wird sodann noch zur Abkürzung

$$e^{\frac{2\pi i}{q-1}} = \omega$$

gesetzt, so sind die Funktionen zu bilden

$$\xi(s, \nu) = \sum \omega^{\nu \cdot \operatorname{ind} n} \cdot n^{-s},$$

wobei ν eine ganze reelle Zahl bedeutet und n die Werthe aller durch q nicht theilbaren Zahlen annimmt. Offenbar ist wegen der Definition von ω

$$\xi(s, \nu) = \xi(s, \nu'),$$

wenn und nur wenn

$$\nu \equiv \nu' (\mathrm{mod}\,[q-1]),$$

sodass es nur $q-1$ verschiedene solche Funktionen gibt.

Für $\xi(s, \nu)$ gilt die der oben angeführten die Funktion $\xi(s)$ betreffenden Euler'schen Relation analoge Relation

$$\xi(s, \nu) = \prod \frac{1}{1 - \omega^{\nu \,\mathrm{ind}\, p}\, p^{-s}},$$

wenn p die Werthe aller Primzahlen ausser q annimmt.

Daraus folgt

$$l\xi(s, \nu) = \sum \frac{1}{m}\, \omega^{\nu m \,\mathrm{ind}\, p}\, p^{-ms},$$

wo p^m der Reihe nach die Werthe sämmtlicher positiven Potenzen von Primzahlen ausser denen von q annimmt.

Bilden wir jetzt den Ausdruck

$$\sum_{\nu=0}^{q-2} \omega^{\nu\nu'} l\xi(s, \nu) = \sum_{\nu=0}^{q-2} \sum \frac{1}{m}\, \omega^{\nu(\nu' + m \,\mathrm{ind}\, p)}\, p^{-ms},$$

wobei ν' irgend eine ganze Zahl bedeutet und von p^m das gleiche wie vorher gilt, so verschwindet rechter Hand $\sum \omega^{\nu(\nu' + m \,\mathrm{ind}\, p)}$ jedesmal, wenn $\nu' + m \,\mathrm{ind}\, p$ nicht durch $q-1$ theilbar ist, denn ist δ der grösste gemeinsame Theiler von $q-1$ und $\nu' + m \,\mathrm{ind}\, p$, so durchläuft $\omega^{\nu(\nu' + m \,\mathrm{ind}\, p)}$ bei der Summirung δ-mal sämmtliche $\frac{q-1}{\delta}$-ten Wurzeln der Einheit, die sich annulliren, wenn $\frac{q-1}{\delta}$ von 1 verschieden ist. Ist dagegen $\frac{q-1}{\delta} = 1$, also $\nu' + m \,\mathrm{ind}\, p$ durch $q-1$ theilbar, so ist $\sum \omega^{\nu(\nu' + m \,\mathrm{ind}\, p)} = q-1$, mithin ist

$$\sum_{\nu=0}^{q-2} \omega^{\nu\nu'} l\xi(s, \nu) = (q-1) \sum \frac{1}{m}\, p^{-ms},$$

wo nunmehr rechts p^m die Werthe aller Primzahlpotenzen innerhalb der arithmetischen Progression, deren Glieder einen Index $\equiv \nu'(\mathrm{mod}\, q-1)$ besitzen, annimmt. Durch Veränderung des ν' kann man auf diese Weise jede der $q-1$ Progressionen mit der Differenz q, die keine durch q theilbaren Glieder besitzen, isoliren.

Nachdem so der analytische Ausgangspunkt für die zu behandelnden Probleme festgestellt ist, handelt es sich darum, die Funktionen $\xi(s)$ und $\xi(s,\nu)$, durch welche die jedesmalige Funktion F(s) (in der Bedeutung des § 1) sich zusammensetzt, auf solche Weise zu erörtern, dass die geforderte Zerlegung der Funktionen F(s) ermöglicht wird.

§ 4. **Discussion der Funktionen ξ.**

Zunächst können wir die Funktionen $\xi(s)$ und $\xi(s,\nu)$ zurückführen auf folgende Funktion zweier Variabeln z und s:

$$z^{-s}+(z+1)^{-s}+(z+2)^{-s}+\ldots \text{ in inf.}$$

Dabei wird z als reell und positiv vorausgesetzt; s muss, damit die Reihe convergirt, einen reellen Theil, der algebraisch kleiner ist als -1, haben. Für dies Werthgebiet von s werde die durch die Reihe definirte Funktion von z und s mit B (z, s) bezeichnet.

Es ist dann $$\xi(-s)=B(1,s)$$

$$\xi(-s,k)=q^{-s}\cdot\sum_{\nu=1}^{q-1}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,B\left(\frac{\nu}{q},s\right).$$

Man kann leicht einen Ausdruck für B(z, s) finden, der noch gilt, wenn s nur der Beschränkung unterworfen ist, dass der reelle Theil algebraisch kleiner ist als eine beliebige vorgegebene Zahl N, indem wir nämlich den Ausdruck bilden:

$$\frac{1}{2}z^{-s}+\sum_r \alpha_r z^{s-r}+\sum_n\left\{\frac{(s+n)^{-s}+(z+n-1)^{-s}}{2}\right.$$

$$\left.+\sum_r \alpha_r\left[(z+n)^{s-r}-(z+n-1)^{s-r}\right]\right\},$$

in welchem n alle Zahlen von 1 bis ∞, r die Zahlen $-1, 0, 1 \ldots$, $N-1$ zu durchlaufen hat, und die Coefficienten α_r als in der Weise bestimmt zu denken sind, dass, wenn man in der nach n genommenen Summe jedes Glied mit Hilfe des binomischen Satzes nach fallenden Potenzen von $z+n$ entwickelt, die Coefficienten der s-ten, $(s-1)$-ten .. bis zur $(s-N)$-ten Potenz verschwinden.

Die Bestimmung der α_r in diesem Ausdruck geschieht durch das in der Theorie der halbconvergenten Reihen vorkommende Gleichungssystem. Man findet

$$\alpha_{-1} = -\frac{1}{s+1},$$

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_4 = \ldots = 0,$$

und für die übrigen α ganze Funktionen von s.

Dieser Ausdruck stimmt nun erstens für diejenigen Werthe von s, für welche der gegebene Ausdruck für B(z, s) gültig ist, mit diesem überein; zweitens aber gilt er auch noch für alle s, deren reeller Theil algebraisch kleiner ist als N, weil der Voraussetzung nach das n-te Summenglied in demselben höchstens von der Ordnung wie $(z+n)^{s-N-1}$ ist; die Reihe mithin convergirt. Wir können ihn daher als Definition von B(z, s) für dies erweiterte Gebiet der s hinstellen [1]).

Es kommt darauf an, eine merkwürdige von Riemann gefundne Relation zwischen $\zeta(-s)$ und $\zeta(1+s)$, die für die weitern Zwecke von Wichtigkeit ist, abzuleiten, sowie auch eine analoge Relation zwischen $\zeta(-s, k)$ und $\zeta(1+s, -k)$. Dies geschieht, indem wir B(z, s) in eine für das Intervall $z=0$ bis 1 geltende Fourier'sche Reihe der Form

---

1) Wegen der in den α_r als Faktoren auftretenden Bernoulli'schen Zahlen ist die Funktionsbezeichnung B gewählt. Für ganzzahlige s reducirt sich der Ausdruck auf eine ganze Funktion von z, da dann jedes Glied der Summe nach n verschwindet. Die von Schlömilch, Kompendium der höh. Anal. Bd. 2, S. 209 eingeführten „Bernoulli'schen Funktionen" $\varphi(z, m)$ leiten sich aus B(z, s) ab durch:

$$\varphi(z, m) = -m\,(B[z, m-1] - \alpha_{m-1}).$$

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos 2\pi z + \ldots a_n\cos 2n\pi z + \ldots$$
$$+ b_1\sin 2\pi z + \ldots b_n\sin 2n\pi z + \ldots$$

entwickeln.

Nach bekannter Regel ist dann

$$a_n = 2\int_0^1 B(z,s)\cos 2n\pi z\,dz$$

$$b_n = 2\int_0^1 B(z,s)\sin 2n\pi z\,dz.$$

Setzen wir hier, indem wir uns zunächst auf Werthe von s mit einem zwischen 0 und 1 liegenden reellen Theil beschränken, für B(z, s) den Ausdruck

$$\frac{1}{2}z^s - \frac{z^{s+1}}{s+1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(z+n)^s + (z+n-1)^s}{2} + \frac{(z+n-1)^{s+1} - (z+n)^{s+1}}{s+1}\right\}$$

ein, so erhält man durch partielle Integration leicht:

$$a_n = -\frac{s}{n\pi}\int_0^\infty z^{s-1}\sin 2n\pi z\cdot dz$$

$$b_n = \frac{s}{n\pi}\int_0^\infty z^{s-1}\cos 2n\pi z\cdot dz;$$

woraus für $n > 0$:

$$a_n = \frac{-2s}{(2n\pi)^{s+1}}\int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,dx,$$

$$b_n = \frac{2s}{(2n\pi)^{s-1}}\int_1^\infty x^{s-1}\cos x\,dx,$$

dagegen $a_0 = 0$.

Die in den letzten Ausdrücken vorkommenden bestimmten Integrale lassen sich bekanntlich durch $\sin\frac{1}{2}s\pi\cdot\Gamma(s)$, bezüglich $\cos\frac{1}{2}s\pi\cdot\Gamma(s)$ ersetzen, und wir erhalten:

$$B(z,s) = -2s \cdot \sin\tfrac{1}{2}\pi s \cdot \Gamma(s) \cdot \sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi z}{(2n\pi)^{s+1}}$$

$$+2s \cdot \cos\tfrac{1}{2}\pi s \cdot \Gamma(s) \cdot \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{(2n\pi)^{s+1}}$$

Diese Formel gilt, obwohl sie nur für die Werthe von s mit einem reellen Theil zwischen 0 und 1 abgeleitet ist, offenbar für alle s mit einem positiven reellen Theil, sowie auch für den Grenzwerth $z=1$, da $B(0,s)=B(1,s)$.

Für $z=1$ geht $B(z,s)$ über in $\xi(-s)$, und man hat:

$$\xi(-s) = -2\Gamma(s+1) \cdot \sin\tfrac{1}{2}\pi s \cdot (2\pi)^{-s-1} \cdot \xi(1+s).$$

Dies ist die eine Formel, auf deren Ableitung es uns hier ankommt, und die nachher noch etwas umgeformt wird. Zweitens haben wir:

$$\xi(-s,k) = 2q^s \Gamma(s+1)$$

$$\times \left\{ -\sin\frac{\pi s}{2} \sum_{n=1}^\infty \sum_{\nu=1}^{q-1} \frac{1}{(2n\pi)^{s+1}} \cdot \omega^{k \operatorname{ind} \nu} \cos\frac{2n\nu\pi}{q} \right.$$

$$\left. +\cos\frac{\pi s}{2} \sum \sum \frac{1}{(2n\pi)^{s+1}} \omega^{k \operatorname{ind} \nu} \sin\frac{2n\nu\pi}{q} \right\}$$

In dieser Formel können wir k als nicht durch $q-1$ theilbar nehmen, da der Fall $k \equiv 0 \pmod{q-1}$ wegen der Gleichung

$$\xi(-s,0) = (1-q^s)\,\xi(-s)$$

schon durch die vorige Relation erledigt wird.

Die in der Formel rechter Hand vorkommenden Summen

$$\sum_{\nu=1}^{q-1} \omega^{k \operatorname{ind} \nu} \cos\frac{2n\nu\pi}{q} \quad \text{und} \quad \sum \omega^{k \operatorname{ind} \nu} \sin\frac{2n\nu\pi}{q}$$

kann man ersetzen bezüglich durch

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{-2n\nu\pi i}{q}}+\frac{1}{2}\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{2n\nu\pi i}{q}}$$

und

$$-\frac{i}{2}\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{2n\nu\pi i}{q}}+\frac{i}{2}\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{-2n\nu\pi i}{q}}.$$

Zu unterscheiden sind die beiden Fälle, ob n ein Vielfaches von q ist oder nicht. Im ersten Fall ist

$$\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{2n\nu\pi i}{q}}=\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}=0,$$

desgleichen $$\sum_{\omega}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{-2n\nu\pi i}{q}}.$$

Im zweiten Fall ist

$$\sum_{\omega}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{2n\nu\pi i}{q}}=\omega^{-k\,\mathrm{ind}\,n}\sum_{\omega}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu'}\,e^{\frac{2\nu'\pi i}{q}},$$

indem rechts $n\nu\equiv\nu'$ gesetzt ist, das dann bei der Summirung $q-1$ Zahlen durchläuft, die je einer der Zahlen $1,2,..,q-1$, mod. q congruent sind, sodass statt ν' auch wieder der Summationsbuchstabe ν in der Bedeutung der linken Seite stehen kann. Ebenso ist

$$\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{-2n\nu\pi i}{q}}=\omega^{-k(\mathrm{ind}\,n+\mathrm{ind}\,[-1])}\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}.$$

Nun ist $\mathrm{ind}\,(-1)=\frac{q-1}{2}$, daher $\omega^{k\,\mathrm{ind}\,(-1)}=\pm 1$, indem das obere Vorzeichen gilt, wenn k eine gerade, das untere, wenn k eine ungerade Zahl. Mithin folgt:

$$\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\cos\frac{2n\nu\pi}{q}=\begin{cases}\omega^{-k\,\mathrm{ind}\,n}\sum_{\omega}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}, & (k\text{ gerade})\\ 0, & (k\text{ ungerade}),\end{cases}$$

$$\sum_{\nu}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\sin\frac{2n\nu\pi}{q}=\begin{cases}-i\,\omega^{-k\,\mathrm{ind}\,n}\sum_{\omega}\omega^{k\,\mathrm{ind}\,\nu}\,e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}, & (k\text{ unger.})\\ 0, & (k\text{ gerade}),\end{cases}$$

und weiterhin

$$\zeta(-s,k) = -\sum_{\nu} \omega^{k \operatorname{ind} \nu} e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}$$

$$\times 2 \sin \tfrac{1}{2}\pi s \cdot \Gamma(s+1) \cdot \frac{q^s}{(2\pi)^{s+1}} \cdot \zeta(1+s,-k) \quad \text{für gerade } k,$$

$$= -i \sum_{\nu} \omega^{k \operatorname{ind} \nu} e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}$$

$$\times 2 \cos \tfrac{1}{2}\pi s \cdot \Gamma(s+1) \cdot \frac{q^s}{(2\pi)^{s+1}} \cdot \zeta(1+s,-k) \quad \text{für ungerade } k.$$

Dies ist die zweite, ebenfalls noch etwas umzuformende Relation, die wir ableiten wollten. Setzt man in dieser Formel speciell $s = -\frac{1}{2}$, so erscheint rechts der Faktor $\zeta(\frac{1}{2}, -k)$ der mit $\zeta(\frac{1}{2}, +k)$ den Modul gemeinsam hat. Bei Beachtung, ferner dass $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, erhält man das Resultat, dass der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu} \omega^{k \operatorname{ind} \nu} e^{\frac{2\nu\pi i}{q}}$$

für beliebige k den Werth $\sqrt{q}$ hat.

Im besondern Fall $k = \frac{q-1}{2}$ ist $\zeta(\frac{1}{2}, -k) = \zeta(\frac{1}{2}, +k)$ und $\omega^{k \operatorname{ind} \nu} = +$ oder -1, je nachdem $\operatorname{ind} \nu$ gerade oder ungerade, d. h. ν quadratischer Rest oder Nichtrest von q ist. Man erhält bei Anwendung des Legendre'schen Symbols:

$$\sum_{\nu} \left(\frac{\nu}{q}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{q}} = \begin{cases} \sqrt{q}, & \text{wenn } \frac{q-1}{2} \text{ gerade} \\ i\sqrt{q}, & \text{wenn } \frac{q-1}{2} \text{ ungerade;} \end{cases}$$

der berühmte zuerst von Gauss in der Abhandlung Summatio quarundam serierum singularium bewiesene Satz, der hier gelegentlich als Corollar folgt.

Die drei Relationen, die wir gefunden haben, bezüglich zwischen $\zeta(-s)$ und $\zeta(1+s)$, ferner $\zeta(-s, k)$ und $\zeta(1+s, -k)$ einerseits für gerade, andrerseits für ungerade k, lassen sich mit Benutzung der aus der Theorie der Gammafunktion abzuleitenden Beziehungen:

$$\sin\frac{\pi s}{2}\cdot\Gamma(s+1)=\pi^{\frac{1}{2}}2^{-s}\cdot\prod\left(\frac{1+s}{2}\right):\prod\left(\frac{-s}{2}\right)$$

$$\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\Gamma(s+1)=\pi^{\frac{1}{2}}2^{-s}\cdot\prod\left(\frac{2+s}{2}\right):\prod\left(\frac{1-s}{2}\right)$$

auch so ausdrücken, indem wir überall $-s$ anstatt s und statt k wieder v setzen:

„Es bleibt die Funktion

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot\zeta(s)$$

umgeändert, wenn s *in* $1-s$ *verwandelt wird; ferner verändert sich für* $v=1, 2, \ldots q-2$ *die Funktion*

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s}{2}}\zeta(s, v) \quad \textit{bei geradem } v,$$

$$\prod\left(\frac{1+s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{q}\right)^{\frac{-s}{2}}\zeta(s, v) \quad \textit{bei ungeradem } v$$

nur um einen von s *unabhängigen hinzutretenden Faktor, wenn gleichzeitig* s *in* $1-s$ *und* v *in* $-v$ *verwandelt wird.“*

§ 5. **Fortsetzung. Singularitäten und Produktform der ζ.**

Aus den Entwicklungen des vorigen Paragraphen lassen sich nun erstens Schlüsse machen über die Art, wie die Funktionen $\zeta(s)$ und $\zeta(s, v)$ verschwinden und unendlich werden, und daraus leiten sich zweitens Produktformen für diese Funktionen ab.

Was zunächst die Unstetigkeitsstellen der Funktionen betrifft, so folgt aus dem Umstand, dass die α_r in dem für die Funktion $B(z, s)$ aufgestellten Ausdruck in § 4, ausser

$$\alpha_{-1} = -\frac{1}{s+1},$$

sämmtlich ganze Funktionen von s sind, dass B(z, s) nur für den Punkt $s = -1$ unendlich wird und zwar wie $-\frac{1}{s+1}$. Beachten wir nun die Ausdrücke der Funktionen ξ durch B, so folgt, dass nur $\xi(s)$ und $\xi(s, 0) = \left(1 - q^{-s}\right) \xi(s)$ proportional $\frac{1}{1-s}$ unendlich werden, während die übrigen Funktionen überall endlich bleiben und dass alle betrachteten Funktionen eindeutig sind.

Was sodann die Verschwindungswerthe anlangt, so kommt erstens der Umstand in Betracht, dass $l\,\xi(s)$ und $l\,\xi(s, \nu)$ für Werthe von s mit einem reellen Theil > 1, sich ausdrücken lassen durch die gegen endliche Werthe convergirenden Reihen

$$\sum \frac{1}{m} p^{-ms}, \text{ bezüglich } \sum \frac{1}{m} \omega^{\nu \, m \, \mathrm{ind}\, p} \, p^{-ms},$$

wo p^m alle positiven Potenzen von Primzahlen, von denen im zweiten Fall diejenigen von q auszunehmen sind, durchläuft. Es kann mithin $\xi(s)$ und $\xi(s, \nu)$ für diese Werthe von s nicht verschwinden.

Beachtet man zweitens den Satz am Ende des vorigen Paragraphen, so muss, da $\prod\left(\frac{s}{2}\right)$ für $s = 0, -2, -4, \ldots$ und $\prod\left(\frac{1+s}{2}\right)$ für $s = -1, -3, -5, \ldots$ in erster Ordnung unendlich wird,

$\xi(s)$ für $s = -2, -4, -6 \ldots$

$\xi(s, \nu)$ bei geradem ν für $s = 0, -2, -4, \ldots$

$\xi(s, \nu)$ bei ungeradem ν für $s = -1, -3, -5, \ldots$

in erster Ordnung verschwinden, und müssen die übrigen Verschwindungsstellen dieser Funktionen einen reellen Theil zwischen 0 und 1 haben. [$\xi(s, 0) = (1 - q^{-s})\,\xi(s)$ bleibt immer ausgenommen].

Was diese übrigen Verschwindungsstellen der Funktionen betrifft, so bildet die Untersuchung ihrer Vertheilung auf dem Streifen der s-Ebene, der einem reellen Theil von s zwischen 0 und 1 entspricht, den bei weitem schwierigsten Theil des ganzen Problems. Wie in der Einleitung erwähnt wurde, hatte Riemann die Vermuthung, dass diese Verschwindungstellen was die Funktion $\zeta(s)$ betrifft, sich sämmtlich durch die Form $\frac{1}{2}+\alpha i$ wo α reell ist, bringen lassen. Dieser Satz gilt nicht nur für die Funktion $\zeta(s)$ sondern auch für die $\zeta(s, \nu)$.

Es sollen nachher einige weitere darauf bezügliche Bemerkungen gemacht, hier dagegen die Untersuchung nur soweit durchgeführt werden, dass die in § 1 und 3 in Aussicht gestellten Entwicklungen sich rechtfertigen lassen.

Nach dem Schlussresultat des vorigen Paragraphen ist die Funktion

$$s(1-s)\pi^{-\frac{s}{2}}\prod\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

eine gerade Funktion von $s-\frac{1}{2}$ und zufolge der eben durchgeführten Betrachtungen überall im endlichen stetig. Wir bezeichnen sie kurz mit $\psi(s)$. Die Anzahl ihrer Nullstellen, die, wie wir ebenfalls sahen, alle einen reellen Theil zwischen 0 und 1 haben, soweit der imaginäre Theil zwischen $-ui$ und $+ui$ liegt, findet man, indem man das Integral $\int d\,l\,\psi(s)$ positiv um das Gebiet erstreckt, in welchem der reelle Theil von s zwischen 0 und 1, der imaginäre zwischen $-ui$ und $+ui$ liegt. Dasselbe ist gleich dem $2\pi i$-fachen der gesuchten Anzahl. Man kann es in vier Theile zerlegen:

1) von $t-ui$ bis $t+ui$, (wo t eine Grösse >1)
2) von $t+ui$ bis $1-t+ui$,
3) von $1-t+ui$ bis $1-t-ui$,
4) von $1-t-ui$ bis $t-ui$.

Von diesen Theilintegralen ist das erste dem dritten, das zweite dem vierten gleich und alle rein imaginär.

Das erste berechnet sich dadurch, dass man im Ausdruck für $\psi(s)$ den Faktor $\zeta(s)$ durch $\Pi 1:(1-p^{-s})$ und $\Gamma(s:2)$

durch die bekannte Produktform ersetzt, leicht als bis auf eine Constante genau $= \mathrm{u}\,\mathrm{i}\left(\mathrm{l}\frac{\mathrm{u}}{2\pi} - 1\right)$.

Was das zweite und vierte Theilintegral anlangt, so existirt für die betreffenden Integrationsintervalle zunächst kein brauchbarer Ausdruck für die zu integrirende Funktion $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\mathrm{l}\,\psi(\mathrm{s})$. Nun ist aber schon im voraus klar, dass diese beiden Integrale bei grossem u von geringerer Grössenordnung sind als das erste und dritte. Machen wir diese Hypothese, so lässt sich, wie wir sehen werden, aus ihrer Consequenz eine obere Grenze für den absoluten Werth des zweiten oder des ihm gleichen vierten Theilintegrals finden, durch welche sich rückwärts die Hypothese bestätigt[1]). Aus der Hypothese folgt nämlich, dass etwa $\frac{\mathrm{u}}{\pi}\left(\mathrm{l}\frac{\mathrm{u}}{2\pi} - 1\right)$ Nullstellen von $\psi(\mathrm{s})$ mit einem absoluten Werth des imaginären Theils zwischen 0 und u existiren.

Dann aber muss

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\mathrm{l}\,\psi(\mathrm{s}) = \sum \frac{1}{\mathrm{s} - \mathrm{c}}$$

sein, wenn rechter Hand c alle Nullstellen von $\psi(\mathrm{s})$ nach der absoluten Grösse geordnet, durchläuft. Denn ersetzt man

---

1) Dies immerhin nicht ganz korrekte Verfahren gedenke ich bei einer andern Gelegenheit durch ein anderes zu ersetzen. Der von Riemann eingeschlagene Weg ist bei der Kürze seiner Darstellung nicht ersichtlich. Der von ihm durch eine ganz andre Diskussion der Funktion $\zeta(\mathrm{s})$ gefundene Ausdruck für die hier $\psi(\mathrm{s})$ genannte Funktion, ein Ausdruck, den er „sehr bequem" nennt, scheint für den vorliegenden Zweck doch nicht ganz brauchbar zu sein, da er $\psi(\mathrm{s})$ nicht in Form eines Produkts gibt, so dass man die einzelnen Faktoren logarithmiren könnte. Jedenfalls ist das Resultat der Integration bei Riemann insofern widersinnig, als das $\int \mathrm{d}\,\mathrm{l}\,\psi\mathrm{s}$ um das betrachtete Intervall genommen als bis auf eine Grösse der Ordnung $\frac{1}{\mathrm{u}}$ genau $= 2\,\mathrm{i}\left(\mathrm{u}\,\mathrm{l}\frac{\mathrm{u}}{2\pi} - \mathrm{u}\right)$ gesetzt wird, da doch der $2\pi\mathrm{i}$-te Theil eine ganze Zahl sein muss, woraus für den Fehler mindestens die Ordnung einer Constanten folgt.

$$\sum \frac{1}{s-c} \text{ durch } \sum_{\alpha} \left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}-\alpha i} + \frac{1}{s-\frac{1}{2}+\alpha i} \right)$$

$$= \sum \frac{2s-1}{(s-\frac{1}{2})^2+\alpha^2},$$

wo dann die Grösse $\frac{1}{2}+\alpha i$ sämmtliche c mit positiv-imaginären Theil durchlaufen muss, so wächst dieser Summenausdruck bei zunehmendem s ungefähr wie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{2s}{s^2+u^2} \left(\frac{1}{2\pi} l \frac{u}{2\pi} \right) du,$$

da nämlich nach obiger Berechnung zwischen der absoluten Grösse u und $u+1$ durchschnittlich

$$\frac{d}{du}\left[\frac{u}{2\pi} \left(l\frac{u}{2\pi} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2\pi} l \frac{u}{2\pi}$$

Werthe α existiren. Dies Integral aber, das sich auch

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+u^2} \left(l\frac{s}{2\pi} + l\frac{u}{2\pi} \right) du$$

schreiben lässt, ist eine Grösse von der Ordnung wie ls. Nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie aber kann sich $\sum \frac{1}{s-c}$ von $\frac{d}{ds}$ nur unterscheiden um die Ableitung des Logarithmus einer ganzen transcendenten, in diesem Fall geraden, Funktion von $s-\frac{1}{2}$, also eine Potenzreihe mit ungeraden Exponenten von $s-\frac{1}{2}$. Da aber ausserhalb des betrachteten Flächenstreifens der s-Ebene der Logarithmus der Funktion $\psi(s)$ selber für wachsende s nur in der Ordnung wie ls zunimmt, wie man leicht findet, so muss diese Potenzreihe verschwinden.

$\frac{d}{ds} l\psi(s)$ ist für $s = t+ui$, wenn t gegen u klein ist, von der Ordnung wie lu. Vorausgesetzt nun, dass dieser Ausdruck vollständig durch

$$\sum\left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}+\alpha i}+\frac{1}{s-\frac{1}{2}-\alpha i}\right)$$

wiedergeben wird, so ist der reelle Theil jedes Gliedes dieser Summe, wenn, wie wir voraussetzen, $t>1$, positiv. Man erhält daher eine obere Grenze für die mögliche Anzahl der $\frac{1}{2}+\alpha i$ mit imaginären Bestandtheil zwischen $i(u-a)$ und $i(u+a)$, wenn a eine Constante, durch die Annahme, dass der reelle Theil von $\frac{d}{ds}l\psi(s)$ ausschliesslich von den gerade diesen Grössen $\frac{1}{2}+\alpha i$ entsprechenden Gliedern der Summe herrührt. Die Anzahl dieser Grössen kann daher höchstens von derselben Grössenordnung wie $\frac{d}{ds}l\psi(s)$, d. h. von der Ordnung lu sein. Setzt man daher für das Differential $dl\psi(s)$ des zweiten und vierten Theilintegrals

$$\sum_{\alpha}\frac{2s-1}{(s-\frac{1}{2})^2+\alpha^2}\cdot ds$$

ein, so findet man diese Integrale als höchstens von der Grössenordnung wie

$$\int_{t+ui}^{1-t+ui} ds\left(\int_{0}^{u}\frac{2s-1}{(s-\frac{1}{2})^2+u^2}\cdot lu\cdot du+\int_{u}^{\infty}\frac{2s-1}{(s-\frac{1}{2})^2+u^2}\cdot lu\cdot du\right),$$

oder von der Ordnung wie $(lu)^2$. Um eine Grösse dieser Ordnung kann daher auch höchstens die Anzahl der $\frac{1}{2}+\alpha i$ mit einem absoluten Werth des α unterhalb u von $\frac{u}{2\pi}\left(l\frac{u}{2\pi}-1\right)$ abweichen.

Dieselben Erörterungen lassen sich nun über die Verschwindungswerthe der Funktionen $\xi(s, v)$ anstellen. Bezeichnet man daher, wie es schon geschehen, die complexen Verschwindungsstellen von $\xi(s)$ die einen positiv-imaginären Theil haben, mit $\frac{1}{2}+\alpha i$, so ist

$$s\cdot(1-s)\prod\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot\zeta(s)$$
$$=C\cdot\prod_{\alpha}\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}-\alpha i}\right),$$

wo die Constante C sich dadurch, dass man $s=0$ setzt, $=2\,\xi(0)$ bestimmt, ein Werth der sich bei Benutzung der frühern Ausdrücke für $\xi(s)$ als $=-1$ herausstellt.

Ebenso ist bei geradem ν

$$\prod\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s}{2}}\cdot\xi(s,\nu)=C_{\nu}\cdot\prod_{\alpha_{\nu}}\left(1-\frac{2}{\frac{1}{2}+\alpha_{\nu}i}\right),$$

bei ungeradem ν

$$\prod\left(\frac{1+s}{2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{q}\right)^{-\frac{s}{2}}\cdot\xi(s,\nu)=C_{\nu}\cdot\prod_{\alpha_{\nu}}\left(1-\frac{s}{\frac{1}{2}+\alpha_{\nu}i}\right),$$

wenn C_{ν} eine Constante ist, die durch Setzen von $s=0$ bestimmt werden kann, und die $\frac{1}{2}+\alpha_{\nu}i$ die complexen Nullstellen von $\xi(s,\nu)$, der absoluten Grösse nach geordnet durchlaufen.

Die Anzahl derselben, soweit sie einen Modul $<u$ haben, ist ebenso wie die der $\frac{1}{2}\pm\alpha i$ der Funktion $\xi(s)$ bis auf eine Grösse höchstens der Ordnung $(lu)^2$ genau, $\frac{u}{\pi}\left(l\frac{u}{2\pi}-1\right)$.

Mit Anwendung der Formel

$$\Gamma(x)=\mathrm{Lim}\,(n=\infty)\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{2}{z+2}\cdots\frac{n}{x+n}\cdot n^{x}\right\}$$

erhalten wir:

$$-\frac{d}{ds}l\,\xi(s)=\frac{-1}{2}l\pi+\frac{1}{s-1}$$
$$-\mathrm{Lim}\left\{\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+4}+\cdots+\frac{1}{s+2n}-\frac{1}{2}ln\right\}$$
$$-\sum_{\alpha}\left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}-\alpha i}+\frac{1}{s-\frac{1}{2}+\alpha i}\right),$$

wenn $\frac{1}{2}+\alpha i$ in der Summe rechter Hand alle complexen Nullstellen von $\zeta(s)$ mit positiv-imaginären Bestandtheil durchläuft;

$$-\frac{d}{ds}l\,\zeta(s,\nu)=$$

$$\frac{-1}{2}l\,\pi-\mathrm{Lim}\left\{\frac{1}{s}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+4}+\cdots+\frac{1}{s+2n}+l\,n\right\}$$

$$-\sum_{\alpha_\nu}\left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}-\alpha_\nu i}\right).\quad\text{bei geradem }\nu,$$

$$=-\tfrac{1}{2}l\,\pi-\mathrm{Lim}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+3}+\cdots+\frac{1}{s+2n+1}-\frac{1}{2}l\,n\right\}$$

$$-\sum\frac{1}{s-\frac{1}{2}-\alpha_\nu i}\quad\text{bei ungeradem }\nu,$$

wobei $\frac{1}{2}+\alpha_\nu i$ alle complexen Nullstellen von $\zeta(s,\nu)$, der Grösse des absoluten Werthes nach geordnet, durchläuft.

§ 6. Lösung des Problems.

In den letzten drei Formeln können wir, so lang der reelle Theil von s grösser als 1 ist, die linke Seite mit Hilfe der Euler'schen Formel in eine unendliche Summe, die rechte Seite, was die variablen Glieder betrifft, in ein Aggregat von Integralen verwandeln. Zunächst die erste der Formeln wird:

$$\sum l\,p\cdot p^{-ms}$$

$$=-\tfrac{1}{2}l\,\pi+\int_1^\infty x^{-s}\,dx-\mathrm{Lim}\left\{\int_1^\infty\sum_1^n x^{-s-2n-1}\,dx-\tfrac{1}{2}l\,n\right\}$$

$$-\sum_\alpha\int_1^\infty x^{-s-\frac{1}{2}}\left(x^{\alpha i}+x^{-\alpha i}\right)dx,$$

wo links p^m alle positiven Primzahlpotenzen durchläuft.

Nach der Behauptung des § 1 müsste nun diese Gleichung richtig bleiben, und zwar dann für ganz beliebige Werthe von s gelten, wenn wir links die p^m nur bis zu einer beliebigen

Grösse x wachsen lassen und zugleich rechts überall die obere Grenze ∞ der Integrale durch x ersetzen. Dazu tritt noch die besondere Bestimmung, dass wenn für einen Werth von x die linke Seite sprungweise mit x wächst, das Mittel zwischen den beiden Werthen unterhalb und oberhalb des Sprungs zu nehmen ist.

Man übersieht sofort, dass dann auf der rechten Seite die bei Integration der Integrale der Form

$$\int_1^x x^a \, dx \text{ durch } \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1}$$

entstehenden von x unabhängigen Glieder sich wieder in $-\frac{d}{ds} l\,\zeta(s)$ zusammen ziehen lassen und erhält:

$$\sum l\,p\,p^{-ms}, \; (p^m < x) = -\frac{d}{ds} l\,\zeta(s) - \frac{x^{-s+1}}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-s-2n}}{2n+s}$$
$$+ \sum \left(\frac{1}{s-\frac{1}{2}-\alpha i} \cdot x^{-s+\frac{1}{2}+\alpha i} + \frac{1}{s-\frac{1}{2}+\alpha i} x^{-s+\frac{1}{2}-\alpha i} \right).$$

Nur ist im besondern Fall, dass einer der rechts vorkommenden Nenner für einen bestimmten Werth $s = s_1$ verschwindet, was dann geschieht, wenn $s = s_1$ eine Nullstelle oder die (einzige) Unendlichkeitsstelle 1 von $\zeta(s)$ ist, anstatt des Bestandtheils der rechten Seite:

$$-\frac{d}{ds} l\,\zeta(s) \mp \frac{x^{-s+s_1}}{s-s_1}, \; (s = s_1),$$

zu setzen

$$-\frac{d}{ds} l\,\zeta(s) \mp \frac{1}{s-s_1} \pm l\,x, \; (s = s_1).$$

Für den Fall, dass der reelle Theil von s grösser als 1, kann man in dieser Formel $-\frac{d}{ds} l\,\zeta(s)$ wieder durch $\Sigma l\,p\,p^{-ms}$ mit Summation des p^m bis ∞ ersetzen und findet, wenn man

dies auf die rechte Seite schafft, dass die von x abhängigen Glieder der ersten Seite einen Ausdruck für

$$-\sum l p \cdot p^{-ms}, \quad (p^m > x)$$

bilden, wenn man für den Fall, dass dieser Ausdruck für x sich sprungweise ändert, das Mittel zwischen den Werthen beiderseits des Sprungs nimmt.

Den Beweis der Formel werden wir im nächsten Paragraphen liefern, und es wird sich dabei zeigen, dass sie richtig ist bei der besondern schon in § 1 getroffenen Bestimmung, dass in der nach α genommenen Summe die α nach ihrer Grösse zu ordnen sind.

Nehmen wir rechts nur die Glieder

$$-\frac{d}{ds} l\,\xi(s) - \frac{x^{-s+1}}{s-1}$$

heraus, so ist unter der Voraussetzung, dass sämmtliche α reell sind, keines der übrigen Glieder von einer höhern Grössenordnung als $x^{-s-\frac{1}{2}}$, und es wird sich im nächsten Paragraph zeigen, dass dann auch das ganze Aggregat dieser übrigen Glieder von der Ordnung keiner höhern Potenz von x als der $(\frac{1}{2}-s)$-ten ist. Entsprechendes gilt auch von den spätern Formeln. Man erkennt daher die Wichtigkeit eines Beweises dieses Satzes über die α. Da er noch nicht vollständig durchgeführt wurde, so kann die Richtigkeit dieser Vermuthung Riemann's, sowie die Verallgemeinerung für die α_ν in den Funktionen $\xi(s, \nu)$ in diesen Entwicklungen nicht vorausgesetzt werden.

Es mögen die speciellen Beispiele $s=0$ und $s=1$ angeführt werden. Man findet mit Hilfe der Formel für $\xi(s)$ auf S. 17

$$-\frac{d}{ds}\xi(s)_{s=0} = \lim \left(m + \sum_1^m l\,n - (m+\tfrac{1}{2})\, l\,m \right)$$

wofür man $\frac{1}{2} l\,2\pi$ setzen kann. Dass $\xi(s) = -\frac{1}{2}$, wurde schon früher bemerkt. Daher ist für $s=0$

$$-\frac{d}{ds}l\zeta(s)-\frac{x^{-s+1}}{s-1}=x-l\pi,$$

wodurch bei Giltigkeit der Riemann'schen Hypothese über die α

$$\sum_{p^m}\frac{1}{m}lp^m,\ (p^m<x),$$

bis auf eine Grösse der Ordnung keiner höhern und im allgemeinen keiner geringern Potenz von x als der $\frac{1}{2}$-ten angegeben wird. Ferner geht für $s=1$

$$\frac{d}{ds}l\{(s-1)\zeta(s)\}$$

in die Euler'sche Constante

$$\mathrm{Lim}\,(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-ln)=0{,}577\ldots$$

über, sowie

$$-l\zeta(s)-\frac{x^{-s+1}}{s-1}\ \text{in}\ lx-0{,}577\ldots,$$

durch welchen Ausdruck mithin, wieder bei Giltigkeit jener Hypothese

$$\sum_{p^m}lp\cdot\frac{1}{p^m},\ (p^m<x),$$

bis auf eine Grösse von der Ordnung keiner höhern und keiner geringern Potenz von x als der $(-\frac{1}{2})$-ten angegeben wird.

Multipliciren wir jetzt die Gleichung

$$\sum lp\,p^{-ms},\ (p^m>x)=\frac{x^{-s+1}}{s-1}-\sum\frac{x^{-s+c}}{s-c},$$

in welcher c die Nullstellen von $\zeta(s)$, nämlich -2, -4, -6, .. sowie die $\frac{1}{2}+\alpha i$ und die $\frac{1}{2}-\alpha i$, durchläuft, und der reelle Theil von s grösser als 1 sein muss, mit ds und integriren von s bis ∞, so geht die linke Seite über in

$$\sum\frac{1}{m}p^{-ms},\ (p^m>x);$$

ferner ist

$$\int_s^\infty \frac{x^{-s+c}}{s-c}\,ds = \int_s^\infty x^{-s+c}\,ds \int_1^\infty y^{-s+c-1}\,dy,$$

und mit Anwendung der Substitution $y = z:x$

$$\int_s^\infty ds \int_x^\infty z^{-s+c-1}\,dz = \int_x^\infty \frac{z^{-s+c+1}}{lz}\,dz.$$

Man findet daher

$$\sum \frac{1}{m} p^{-ms},\ (p^m > x) = \int_x^\infty \frac{x^{-s}}{lx}\,dx - \sum_c \int_x^\infty \frac{x^{-s+c-1}}{lx}\,dx,$$

wo über die Summation nach c dasselbe gilt wie vorher. Dass es gerechtfertigt ist, rechts die Summe der Integrale der einzelnen Glieder anstatt des Integrals über die Summe der Glieder zu setzen, folgt leicht aus der im folgenden Paragraph nachzuweisenden Art der Convergenz dieser Summe.

Statt der linken Seite der Gleichung kann man setzen:

$$l\zeta(s) - \sum \frac{1}{m} p^{-ms},\ (p^m > x).$$

Ferner ist zur Transformation der rechten Seite:

$$\int_x^\infty \frac{x^{-s+c-1}}{lx} \frac{-x^{-2}}{} dx = \int_1^\infty \frac{x^{-s+c-1}}{lx}\,dx$$

$$- \left\{ \int_1^x \frac{x^{-s+c-1}}{lx} \frac{-x^{-2}}{} dx - \int_x^\infty \frac{x^{-2}}{lx} \right\},$$

wo statt des ersten Integrals rechter Hand $-\mathrm{l}(s-c)$ gesetzt werden kann, wenn der imaginäre Theil dieses Logarithmus als zwischen $-\pi i$ und $+\pi i$ liegend bestimmt wird.

Auf diese Weise kann man statt obiger Gleichung auch schreiben:

$$\sum_{p^m<x}\frac{1}{m}p^{-ms} = \mathrm{l}\zeta(s)+\int_1^x \frac{x^{-s}-x^{-2}}{\mathrm{l}x}dx-\int_x^\infty \frac{x^{-2}}{\mathrm{l}x}dx+\mathrm{l}(s-1)$$

$$-\sum_c\left\{\int_1^x \frac{x^{-s+c-1}-x^{-2}}{\mathrm{l}x}dx-\int_x^\infty \frac{x^{-2}}{\mathrm{l}x}dx+\mathrm{l}(s-c)\right\},$$

wo wieder c sämmtliche Nullstellen von $\zeta(s)$ in der besprochenen Reihenfolge durchläuft. Diese Gleichung gilt nun offenbar für alle Werthe von s. Speciell für $s=0$ kann man die Glieder der Summe nach c, die den Werthen $c=-2,-4,-6\ldots$ entsprechen, auch in der ursprünglichen Weise als Integrale von x bis ∞ schreiben und dieselben in ein einziges Integral zusammenziehen, ferner

$$\mathrm{l}\zeta(s)+\mathrm{l}(s-1)=\mathrm{l}[-\zeta(0)]=\mathrm{l}\tfrac{1}{2}$$

setzen. Man findet dann, wenn die Anzahl der Primzahlen + der halben Anzahl der Primzahlquadrate, $+\frac{1}{3}$ der Anzahl der Primzahlkuben u. s. f. unterhalb x mit f(x) bezeichnet wird:

$$f(x)=\mathrm{l}\tfrac{1}{2}+\int_1^x\frac{1-x^{-2}}{\mathrm{l}x}dx-\int_x^\infty\frac{dx}{x^2\mathrm{l}x}+\int_x^\infty\frac{1}{x^2-1}\,\frac{dx}{x\mathrm{l}x}$$

$$-\sum_\alpha\left\{\int_1^x\frac{x^{-\frac{1}{2}+\alpha i}+x^{-\frac{1}{2}-\alpha i}-2x^{-2}}{\mathrm{l}x}dx\right.$$

$$\left.-2\int_x^\infty\frac{dx}{x^2\mathrm{l}x}+\mathrm{l}(\alpha^2+\tfrac{1}{4})\right\},$$

eine Formel, welche mit der Endformel der Riemann'schen Abhandlung bis auf die Constante $l\frac{1}{2}$ rechts, an deren Stelle Riemann irrthümlicher Weise eine andere setzt[1]), übereinstimmt.

Setzt man ferner $s=1$, so werden die hauptsächlichsten Glieder der rechten Seite

$$l\{(s-1)\zeta(s)\}_{s=1}+\int_1^x \frac{x^{-1}-x^{-2}}{lx}\,dx-\int_x^\infty \frac{dx}{x^2 lx}.$$

Nun hat für $s=1$ der zu logarithmirende Ausdruck $(s-1)\zeta(s)$ den Werth 1, so dass der Logarithmus verschwindet. Das übrige lässt sich nach der Theorie des Integrallogarithmus verwandeln in

$$llx+C,$$

wo C die Euler'sche Constante $\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln\right)_{n=\infty}$ $=0{,}577\ldots$ bedeutet.

Dieser Ausdruck gibt mithin annähernd

$$\sum \frac{1}{m\,p^m},\ (p^m<x),$$

wieder und zwar, wenn die α sämmtlich reell, bis auf eine Grösse der Ordnung keiner höhern und keiner kleinern Potenz von x als $x^{-\frac{1}{2}}$. Dies stimmt mit dem Resultat des Herrn Mertens, Crelles Journal Bd. 78, S. 52 überein, nur dass dort die Fehlergrenze als von der Ordnung $\frac{1}{lx}$ angegeben wird.

Will man anstatt f(x), d. h. der Anzahl der Primzahlen + der halben Anzahl der Primzahlquadrate + u. s. f. unterhalb x nur die Anzahl der Primzahlen berechnen, so verificirt man, diese Anzahl F(x) genannt, leicht

$$F(x)=f(x)+C_2\,f(x^{\frac{1}{2}})+C_3\,f(x^{\frac{1}{3}})+\ldots,$$

1) Dem Ursprung dieses Irrthums kann man beim Nachrechnen der Riemann'schen Ableitung der Formel leicht nachkommen. Die Berichtigung findet man bereits in der Angabe der Formel durch Herrn Brocard in der am Ende dieser Abhandlung angeführten Schrift.

wenn C_2, C_3 .. definirt werden durch die Gleichung

$$\sum C_n n^{-s} = \frac{1}{\Sigma n^{-1-s}} = \prod (1 - p^{-1-s}),$$

wenn dabei n die Werthe aller ganzen Zahlen, p aller Primzahlen annimmt. Es folgt aus der Gleichung:

$C_2 = -\frac{1}{2}$, $C_3 = -\frac{1}{3}$, $C_4 = 0$, $C_5 = -\frac{1}{5}$, $C_6 = \frac{1}{6}$ u. s. f.

Man braucht die Reihe nur soweit fortzusetzen, dass das letzte Glied $C_n f(x^{\frac{1}{n}})$ ist, wenn $x < 2^n$. Beschränkt man sich auf die hauptsächlichsten Bestandtheile von F(x), so erhält man den Näherungswerth

$$\mathrm{Li}(x) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}}).$$

In ähnlicher Weise sind Aggregate von Integralen zu finden für die beiden andern in § 3 mit Hilfe der Funktion $\zeta(s)$ definirten Ausdrücke $\Sigma c_n n^{-s}$, $(n < x)$. Ist zuerst

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)},$$

so kann man statt der rechten Seite der Gleichung setzen:

$$\zeta(0) \cdot \frac{(1-2s)2^s}{(1-s)^2} \cdot \prod \left(1 - \frac{s}{c}\right)^2 : \prod \left(1 - \frac{s}{c'}\right),$$

wenn c der Reihe nach sämmtliche im vorigen Paragraph berechneten Nullstellen von $\zeta(s)$, sowie c′ die von $\zeta(2s)$ durchläuft, die c sowohl als die c′ nach der absoluten Grösse geordnet, und beide bis zu derselben (unendlich wachsenden) Grenze des absoluten Betrags genommen. Diesen Ausdruck zerlege man in Partialbrüche:

$$\frac{6}{\pi^2}\left(\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1}\right) + \sum \left(\frac{\zeta^2(c')}{2\zeta'(2c')} \cdot \frac{1}{s-c'}\right),$$

(wo $C = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \ln n$, $_{n=\infty} = 0{,}577$ .. bedeutet), verwandle jeden derselben in ein bestimmtes Integral der Form

$\int_1^\infty f(x)x^{-s}dx$ und nehme an Stelle der obern Grenze ∞ die Grenze x. Durch Ausführung der einzelnen Integrationen erhält man auf diese Weise den Ausdruck:

$$\frac{\xi^2(s)}{\xi(2s)} + \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{lx+2C}{1-s} - \frac{1}{(1-s)^2}\right)x^{-s+1} + \sum \frac{2(c'+s)\,\xi'(2c')}{\xi^2(c')}x^{c'-s},$$

welcher für beliebige Werthe von s dem Werth

$$\sum c_n n^{-s},\ (n<x)$$

entspricht. Die c′ sind dabei wieder nach dem absoluten Betrag zu ordnen.

Was den Beweis anlangt, so würde es an dieser Stelle nur darauf ankommen, zu zeigen, dass die beiden Zerlegungen der Funktion $\xi^2(s):\xi(2s)$ das einemal in ein Produkt, das andremal in Partialbrüche richtig sind und speciell, in welcher Weise die Reihe der Partialbrüche convergirt, da die Convergenz des daraus abgeleiteten Ausdrucks dann nach Analogie des im nächsten Paragraphen geführten Beweises folgt. Der Beweis würde leicht sein, wenn man wüsste, dass die Nullstellen von $\xi(s)$, mithin auch die von $\xi(2s)$ mit einer gewissen Gleichmässigkeit aufeinanderfolgen, wodurch sich dann für die Coefficienten der Partialbrüche $\frac{1}{s-c'}$ gewisse Grenzen angeben liessen. Die Discussion dieser Nullstellen im vorigen Paragraphen reicht hierzu noch nicht aus, und ich bleibe daher diesen Nachweis vorläufig noch schuldig.

Für den Fall $s=0$ stimmt unsre Formel, sofern man sich auf die hauptsächlichsten, nämlich die beiden ersten Glieder, die in

$$-\frac{1}{2} + \frac{6}{\pi^2}(x+2C-1)x$$

übergehen, überein mit der von Dirichlet und Mertens (an den früher genannten Orten) abgeleiteten, nur dass dort die

Fehlergrenze zu hoch bestimmt wird, die zufolge unsrer Formel von der Ordnung keiner höhern aber auch keiner geringern Potenz von x als der $\frac{1}{4}$-ten ist, sofern man die Giltigkeit der Riemann'schen Hypothese voraussetzt, dass die complexen Nullstellen von $\zeta(s)$ die Form $\frac{1}{2} \pm \alpha i$, also die von $\zeta(2s)$ die Form $\frac{1}{4} \pm \beta i$ haben, und dass zweitens die in der Grössenordnung des Fehlers als Faktor enthaltene Potenz von x genau durch die Grössenordnung eines einzelnen der bedeutendsten Glieder bestimmt wird, welches letztere man aus der Analogie des im nächsten Paragraphen bewiesenen andern Beispiels folgern kann.

Es mag dem Lesern überlassen bleiben, in gleicher Weise die Consequenz der andern in § 3 gegebenen Gleichung

$$\sum \varphi(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

zu ziehen und mit dem Resultat von Dirichlet und Mertens zu vergleichen.

Was das letzte Problem des § 3 betrifft, die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen in einer arithmetischen Progression unterhalb der Grösse x, so genügt es, sogleich folgende Formeln hinzuschreiben, die in gleicher Weise wie die analogen frühern für die Primzahlen ohne Beschränkung auf eine bestimmte Progression unter Benutzung der Formeln für die $\zeta(s, \nu)$ im vorigen Paragraphen, denen noch für $\nu = 0$ die Formel

$$\zeta(s, 0) = (1 - q^{-s})\, \zeta(s)$$

hinzugefügt werden kann, abzuleiten sind:

Es ist

$$(q-1) \sum \mathrm{l}p \cdot p^{-ms} = -\sum_{\nu=0}^{q-2} \omega^{\nu\nu'} \frac{d}{ds} \mathrm{l}\zeta(s, \nu)$$

$$-\frac{x^{-s+1}}{s-1} + \sum \frac{\omega^{\nu\nu'} x^{-s+c_\nu}}{s-c_\nu},$$

wenn links über alle Primzahlpotenzen p^m innerhalb der arith-

methischen Progression mit der Differenz q, deren Index $\equiv -\nu' \pmod{q-1}$ ist, soweit sie unterhalb der Grösse x liegen, summirt wird, während rechts c_ν sämmtliche Nullstellen sämmtlicher Funktionen $\xi(s, \nu)$ der absoluten Grösse nach geordnet durchläuft. Ferner

$$(q-1)\sum \frac{1}{m} p^{-ms} = -\sum_{\nu=0}^{q-2} \omega^{\nu\nu'} l\xi(s, \nu)$$

$$+\int_1^x \frac{x^{-s}-x^{-2}}{lx}\,dx - \int_x^\infty \frac{x^{-2}}{lx}\,dx + l(s-1)$$

$$-\sum \omega^{\nu\nu'}\left\{\int_1^x \frac{x^{-s+c_\nu+1}-x^{-2}}{lx}\,dx - \int_x^\infty \frac{x^{-2}}{lx}\,dx + l(s-c_\nu)\right\}.$$

Die c_ν sind theils reell und zwar dann, wie wir sahen negative ganze Zahlen oder 0, theils rein imaginär, nämlich die schon in § 3 vorkommenden Wurzeln des Faktors $1-x^{-s}$ von $\zeta(s, 0)$ mit Ausnahme der schon berücksichtigten Wurzel $s=0$, theils complex, nämlich die Grössen $\frac{1}{2} \pm \alpha i$ und die $\frac{1}{2} + \alpha_\nu i$, deren reeller Theil nach der verallgemeinerten Riemann'schen Hypothese durchweg $\frac{1}{2}$ ist. Aus der letzten Formel folgt durch 0-Setzen von s, dass abgesehen von periodischen Gliedern die Anzahl der Primzahlen + der halben Anzahl der Primzahlquadrate $+\frac{1}{3}$ der Kuben u. s. f. innerhalb der einzelnen q — 1 Progressionen, um die es sich handelt, bis auf Constanten einander gleich sind. Daraus folgt aber wieder, dass die Anzahl der Primzahlen selbst in solchen Progressionen, in denen Quadrate vorkommen können, durchschnittlich kleiner ist als in den andern Progressionen. Ferner folgt aus der Formel bei Giltigkeit der Riemann'schen Hypothese, dass, wenn man die Anzahl der Primzahlen + der halben Anzahl der Primzahlquadrate u. s. f. bis zu einer Grösse x innerhalb

einer der Progressionen $= \frac{1}{q-1} \mathrm{Li}(x)$ setzt, der Fehler eine Grösse von der Ordnung keiner höhern und keiner geringern Potenz von x als der $\frac{1}{2}$-ten ist.

Es mag darauf verzichtet werden, die Primzahlen selbst von den übrigen Primzahlpotenzen zu isoliren, was analoger Weise wie in dem ähnlichen behandelten Fall geschieht.

Im folgenden Paragraph würde nun zu zeigen sein, dass die Formeln dieses Paragraphen, die wir nach dem Prinzip des § 1 gebildet haben, deren Richtigkeit aber nicht so klar zu Tage liegt wie die Richtigkeit der in § 2 aufgestellten analogen Formel, in der That zutreffend sind und insbesondere, dass wenn man die periodischen Glieder weglässt, die Grössenordnung des Fehlers die behauptete ist. Es dürfte aber genügen, das Beweisprincip an einem Beispiel zu zeigen, wozu wir die erste der Formeln auswählen. Auf gewisse schon erwähnte in der vorliegenden Abhandlung noch nicht vollständig zu lösende Schwierigkeiten wird dann im § 8 noch etwas eingegangen werden.

§ 7. Beweis der Convergenz der Integralsummen.

Bezeichnen wir den Ausdruck

$$\sum \mathrm{l}p \cdot p^{-ms_1}, \quad (p^m \leqq x)$$

wo p^m die Primzahlpotenzen durchläuft, und s_1 eine beliebige complexe Grösse ist, mit F(x), so verificirt man leicht:

$$\int F(x) x^{-s-1} dx = -\frac{1}{s} \frac{d}{ds} \mathrm{l}\zeta(s+s_1),$$

wenn der reelle Theil von $s+s_1$ grösser als 1 ist.

Wir setzen in dieser Gleichung $s = t+ui$, multipliciren mit $x_1^{ui} du$ und integriren von $-u$ bis $+u$. Man erhält linker Hand:

$$2 \int_x^\infty F(x) x^{-t} \frac{\sin u(\mathrm{l}x - \mathrm{l}x_1) \cdot d\mathrm{l}x}{\mathrm{l}x - \mathrm{l}x_1}$$

welcher Ausdruck mit unendlich wachsenden u für ein beliebiges $x_1 > 1$ übergeht in

$$2\pi \cdot \frac{F(x_1 - 0) + F(x_1 - 0)}{2} \cdot x_1^{-a}$$

und sich für ein endliches u sich von diesem Endwerth um eine Grösse der Ordnung $\frac{1}{u}$ unterscheidet.

Rechter Hand dagegen setzen wir

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{ds} l\,\xi(s+s_1) = -\frac{1}{s}\frac{\xi'(s_1)}{\xi(s_1)} + \frac{1}{1-s_1}\cdot\frac{1}{s+s_1-1} + \sum\frac{1}{s_1-c}\cdot\frac{1}{s+s_1-c},$$

wo über alle Nullstellen c von $\xi(s)$ zu summiren ist. Jeden Bruch der Form $\frac{1}{s+\text{const}}$ verwandeln wir dann in ein Integral

$$\int_1^\infty x^{-s-1-\text{const}} \cdot dx.$$

Durch Ausführung der Substitution $s = t + ui$ und der besprochenen Integration nach u erhalten wir dann, indem wir beachten, dass die c einestheils sämmtliche negativen geraden Zahlen, anderntheils die complexen Nullstellen von $\xi(s)$ durchlaufen:

$$2\int\left(-\frac{\xi'(s_1)}{\xi s_1}x^{-t} + \frac{1}{1-s_1}x^{-t-s_1-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{s_1+2n}x^{-t-s_1-2n}\right) \times \frac{\sin u(lx - lx_1)\cdot dlx}{lx - lx_1} + \sum\frac{2}{s_1-\gamma+\delta i}\int x^{-t-s_1+\gamma+\delta i}\cdot\frac{\sin u(lx-lx_1)\cdot dlx}{lx-lx_1},$$

wenn $\gamma + \delta i$ sämmtliche complexen Nullstellen von $\xi(s)$ durchläuft. (Zwar ist γ durchweg $= \frac{1}{2}$, doch wollen wir diesen noch nicht bewiesenen Satz nicht voraussetzen).

Wir beachten, dass die eingeklammerte Grösse unter dem Integralzeichen für das ganze Integrationsintervall endlich bleibt, bis auf $x = 1$. Für $x = 1$ wird sie unstetig wie

$$\int_1^\infty \frac{x^{-n}\,dn}{s_1+2n}.$$

Man findet in Folge dessen durch eine leichte Discussion, dass das erste Integral bis auf eine Grösse der Ordnung $\frac{lu}{u}$

$$=2\pi\left(-\frac{\xi'(s_1)}{\xi(s_1)}+\frac{1}{1-s_1}x_1^{-s_1+i}+\sum\frac{x^{-s_1-2n}}{c_1+2n}\right)x_1^{-t}$$

ist.

Ein Integral der Summe nach $\gamma+\delta i$ stellt sich dagegen, wenn δ absolut genommen kleiner als u ist, als bis auf eine Grösse der Ordnung $\frac{1}{u-|\delta|}$*) genau $=2\pi\,x_1^{-t-s_1+\gamma+\delta i}$ heraus, — wobei aber natürlich bei Annäherung des δ an u der Fehler endlich bleibt —, andrerseits wenn δ absolut genommen grösser als u ist, als bis auf eine Grösse der Ordnung $\frac{1}{|\delta|-u}$ genau $=0$. Beachtet man ferner, dass vor jedem Integral ausserdem noch der Faktor $\frac{2}{s_1-\gamma-\delta i}$ steht, und dass die Häufigkeit der $\gamma+\delta i$ in der Nähe von δ nur proportional $l\delta$ ist, so findet man, dass die Gleichung

$$2\pi\cdot\frac{F(x_1+0)+F(x_1-0)}{2}\cdot x_1^{-1}$$

$$=2\pi\left(\frac{-\xi'(s_1)}{\xi(s_1)}+\frac{1}{1-s_1}x_1^{-s_1+1}+\sum\frac{x_1^{-s_1+1}}{s_1-c}\right)x_1^{-t},$$

wenn in derselben c sämmtliche reellen Nullstellen von $\xi(s)$, sowie die complexen bis zur absoluten Grösse u durchläuft, richtig ist bis auf eine rechts hinzukommende Grösse höchstens Ordnung wie $\frac{(lu)^2}{u}$.

Bei Beachtung der Definition von F(x) stellt sich in der That heraus, dass wir den aus dieser Gleichung sich dafür ergebenden Werth im vorigen Paragraphen dafür aufgestellt

*) Unter $|\delta|$ wird der absolute Werth von δ verstanden.

haben. Wir sehen auch, dass die einzelnen Bestimmungen des § 1 sich rechtfertigen, nämlich erstens, dass die Glieder unsrer Aggregate von Integralen nach der abnehmenden Grösse der Perioden der Funktionen unter dem Integralzeichen anzuordnen sind, — insofern nämlich diese Perioden umgekehrt proportional dem complexen Bestandtheil der Nullstellen c sind —, dass zweitens bei Verschiedenheit von $F(x_1+0)$ und $F(x_1-0)$ durch das Aggregat von Integralen das Mittel beider dargestellt wird. Macht man ferner die Grösse des u von x_1 abhängig und setzt $u=x_1^m$, so ist $\sum \frac{x_1^{-s_1+c}}{s_1-c}$ wenn man die c nur die die complexen Nullstellen von $\xi(s)$ bis zur absoluten Grösse u durchlaufen lässt, bei Beachtung der Dichtigkeit der c höchstens von der Grössenordnung $m^2(lx_1)^2 x_1^{-s_1+C}$, wenn C den Werth von c mit grössten reellen Theil bedeutet. Der Rest der Summe ist dagegen nur von der Ordnung $\frac{(lu)^2}{u} x_1^t = m^2(lx_1)^{2t-m}$, also, wenn m hinreichend gross gewählt ist, von einer Grösse, die für wachsende x_1 gegen den möglichen Werth des ersten Theils der Summe verschwindet. Auf diese Weise bestätigt es sich, dass wenn der reelle Theil von c durchweg $=\frac{1}{2}$ ist, die Grössenordnung der ganzen Summe $\sum \frac{x_1^{-s_1+c}}{s_1-c}$ von der Ordnung keiner höhern Potenz von x_1 ist als der $(-s_1+\frac{1}{2})^{\text{ten}}$. Es scheint nicht nöthig auf den Beweis einzugehen, dass diese Grössenordnung im allgemeinen auch von keiner geringern Grössenordnung ist. In derselben Weise erledigt sich die Frage nach dem Fehler des mittlern Werths auch für die andern in Betracht gezogenen Funktionen.

Wie schon gesagt, wird hier darauf verzichtet, die leichte Übertragung desselben Beweisprincips für die übrigen Formeln zu erörtern. [1])

1) Wahrscheinlich hat Riemann in dem Beweis, den er Sämmtl. Werke, S. 143 am Anfang andeutet, im wesentlichen das gleiche Princip, wie es in vorliegendem Paragraphen angegeben ist, benutzt; ich bin nicht durch

§ 8. **Ziele für weitere Untersuchungen.**

Das nähere Eingehen darauf, wie es überhaupt möglich ist, eine Summe der Form $\Sigma c_n n^{-s}$, $(n \leqq x)$, durch ein Aggregat von Integralen der betrachteten Art darzustellen, führt wie hier nur angedeutet werden soll, erstens auf gewisse Bedingungen, denen die Constanten, von denen die Integrale abhängen, in unserm Fall insbesondre die complexen Nullstellen von $\xi(s)$ und $\xi(s, \nu)$, genügen müssen, zweitens auf Bedingungen, denen die c_n genügen müssen. Wie auch aus dem durchsichtigen Beispiel des § 2 hervorgeht, muss nämlich, wenn man aus den ersten Integralen des Aggregats ein Summenintegral bildet, einem Glied $c_n n^{-s}$ der Summe ein Bestandtheil

$$\int \frac{c_n x^{-s} \sin u(\mathrm{l}x - \mathrm{l}n)}{(\mathrm{l}x - \mathrm{l}n)\pi} d\mathrm{l}x$$

des Summenintegrals entsprechen, wobei bei wachsender Anzahl der zum Summenintegral hinzugenommenen Glieder des Aggregats von Integralen u ins Unendliche wächst. Iedes Glied $c_n n^{-s}$ hat mithin für sich eine gewisse Periodicität der Funktion unter dem Summenintegral zur Folge, und die ganze Funktion besteht aus der Summe der Beiträge der einzelnen Glieder von $\Sigma c_n n^{-s}$. Es ist also klar, dass die aufeinanderfolgenden Partialintegrale sich in gewisser Weise ergänzen, also ihre Parameter sich gegenseitig bedingen müssen, andrerseits aber müssen auch, damit diese Ergänzung möglich ist, die c_n gewisse Gesetzmässigkeiten, specieller gesagt Periodicitäten, aufweisen.

Was zuerst die Integrale betrifft, so findet man, (— die nähern Beweismomente müssen unterdrückt werden —), dass z. B. die öfter erwähnte Riemann'sche Hypothese von den

---

Riemann, sondern durch die Analogie des in § 2 behandelten Problems darauf gekommen. Auffällig ist, dass derselbe Fehler, der zu der schon bemerkten falschen Bestimmung der Constante in der von Riemann berechneten Formel führt, (die $1\frac{1}{2}$ anstatt des bei Riemann stehenden $1\xi(0)$ heissen muss), an der angegebenen Stelle wiederkehrt.

Nullstellen von $\zeta(s)$ und sogar in der Erweiterung auf die Funktionen $\zeta(s, \nu)$ gilt, und dass ferner diese Nullstellen in derart regelmässigen Abständen aufeinanderfolgen, dass auch die Aufstellung der Integralaggregate, die den Funktionen $\zeta(s)^2 : \zeta(2s)$, sowie $\zeta(s-1) : \zeta(s)$ entsprechen, deren Convergenz noch unsicher war, sich rechtfertigen lassen.

Was sodann die Regularitäten der c_n betrifft, so findet man z. B., um auf die Vertheilung der Primzahlen einzugehen, erstens die gleichmässige Vertheilung der Primzahlen auf die arithmetischen Progressionen statt, (die schon besprochen wurde), zweitens eine gewisse regelmässige Durchschnittsvertheilung in quadratischen Intervallen — wenn der Ausdruck gestattet ist —, d. h. solchen, deren Anfangsglieder eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden. Z. B. findet man durchschnittlich mehr Primzahlen in den Intervallen n^2 bis n^2+n als in den Intervallen n^2+n bis $(n+1)^2$. Ähnliches gilt von cubischen, biquadratischen u. s. f. Intervallen. Ferner wiederholen sich gewisse Gruppirungen der Primzahlen mit gewisser Regelmässigkeit, so ist z. B. die durchschnittliche Häufigkeit der Gruppen von je 2 Primzahlen, die in gegebenem Abstand aufeinanderfolgen, für die ungefähre Grösse x der Primzahlen, proportional $\frac{1}{(\mathrm{l}x)^2}$, wobei allerdings dieser Ausdruck je nach dem gegebenen Abstand mit verschiedenen constanten Faktoren behaftet ist, die Häufigkeit einer Gruppe von 3 Primzahlen proportional $\frac{1}{(\mathrm{l}x)^3}$ und so fort. Endlich findet man auch eine Regelmässigkeit der Vertheilung der Primzahlen insofern, als der mögliche Abstand zweier aufeinanderfolgenden Primzahlen mit ihrer Grösse nicht unverhältnissmässig wächst. So lässt sich beispielsweise keine noch so kleine positive Potenz x^ε von x angeben, dass nicht jenseits eines bestimmten x immer zwischen x und $x+x^\varepsilon$ sich mindestens eine Primzahl befinden muss.

Die nähere Ausführung dieser und andrer Gesetze über die Theilbarkeit der Zahlen und ihres Zusammenhangs mit dem

Riemann'schen Prinzip, Summen durch Aggregate bestimmter Integrale darzustellen, dessen Darstellung diese Abhandlung gewidmet war, werde ich ein andres Mal folgen lassen.

Es möge zum Schluss noch auf die versprochene Widerlegung des Satzes von Legendre eingegangen werden.

Anhang.

Der Legendre'sche Satz.

Derselbe lautet:

Werden die ungeraden Primzahlen 3, 5, 7, 11, .. der Reihe nach mit p_1, p_2, p_3, .. bezeichnet, so ist, wenn n beliebige ungerade Primzahlen vorgegeben sind, unter p_{n-1} aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen immer mindestens eine durch keine dieser n Primzahlen theilbar.

Der Ursprung des Satzes ist klar. Denn betrachtet man folgende Gruppe von $p_{n-1} - 1$ aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen:

$$-(p_{n-1} - 2),\ -(p_{n-1} - 4),\ ..,\ -1, +1,\ ..,\ (p_{n-1} - 2),$$

so ist jede dieser $p_{n-1} - 1$ Zahlen ausser den beiden mittelsten -1 und $+1$ durch mindestens eine der Primzahlen, p_1, p_2, .. p_{n-2} theilbar. Verschiebt man diese Gruppe innerhalb der Zahlreihe um ein Vielfaches des Produkts $2 p_1 p_2 .. p_{n-2}$, so bleibt diese Theilbarkeit bestehen. Fügt man nun zu den Primzahlen p_1, p_2, .. p_{n-2} noch zwei beliebige weitere a und b hinzu, so kann man durch Auflösung einer diophantischen Gleichung das Vielfache von $2 p_1 .. p_{n-2}$ so bestimmen, dass von den beiden mittelsten Zahlen der Gruppe die eine durch a, die andre durch b theilbar ist. Mithin ist jetzt von diesen $p_{n-1} - 1$ Zahlen jede durch mindestens eine der n vorgegebenen Primzahlen p_1, p_2, .. p_{n-2}, a, b theilbar.

Offenbar hat nun Legendre geglaubt, erstens dass eine derartige Gruppe das Maximum der Gliederanzahl von allen Gruppen aufeinanderfolgender ungerader Zahlen besitze, von denen jede durch mindestens eine der Primzahlen p_1, p_2 ..

p_{n-2}, a, b theilbar ist, zweitens, es verringere sich das Maximum, wenn unter diesen n vorgegebenen ungeraden Primzahlen sich nicht die n — 2 ersten befinden. Wenigstens bin ich auf diese Weise selber unabhängig von Legendre auf die Vermuthung desselben Satzes gekommen. Derselbe gilt aber nur bis n = 7. Schon für n = 8 hat man folgende Gruppe von 19 anstatt 18 Zahlen, von denen jede durch eine der 5 Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13 und drei beliebige weitere a, b, c theilbar ist:

Es stehen im folgenden Schema in der ersten Reihe die Nummern der Glieder der Gruppe, darunter jedesmal die Primzahlen, die in der betreffenden Zahl als Theiler enthalten sein sollen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	5	11	3	13	a	3	7	b	3	c	5	3	11	7	3	5	13	3
7						5												

Man wird finden, dass kein Hinderungsgrund besteht durch Auflösung eines Systems diophantischer Gleichungen eine derartige Gruppe zu finden.

Für n = 8 wurde das Legendre'sche Maximum mithin um 1 überstiegen, für n = 11 erhält man eine Gruppe von 32 anstatt von 30 Zahlen, also ein Plus von 2 Gliedern:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	3	19	7	3	5	23	3	a	17	3	b	11	3	13	5	3	7	c	3
	11									5									
	13									7									

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
5	19	3	11	7	3	17	13	3	23	5	3

Für grössere n findet man noch grössere Abweichungen. Anfänglich sind es blos einzelne n, für die das Gesetz nicht gilt, wahrscheinlich gilt es von gewisser Grösse des n an überhaupt nicht mehr.

Anmerkung. Zahlreiche Angaben über die die Primzahlen betreffende Literatur findet man in einem Aufsatz des Herrn Brocard in der Zeitschrift Nouvelle correspondence mathématique, herausgegeben von Catalan, Bd. 5 u. 6. Wenn die Aufzählung und Charakteristik der Literatur dort einigermassen vollständig ist, so dürfte die in der Einleitung angegebene die wesentlichste sein.

Lithomount
Pamphlet
Binder
Gaylord Bros. Inc.
Makers
Syracuse, N. Y.
PAT. JAN 21, 1908

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
513.23P64U C002
UBER DIE HAUFIGKEIT DER PRIMZAHLEN IN AR
3 0112 017101293